

OLLSCOIL NA hÉIREANN, GAILLIMH  
NATIONAL UNIVERSITY OF IRELAND, GALWAY

SCRÚDAITHE AN tSAMHRAIDH 2003

AN CHÉAD SCRÚDÚ OLLSCOILE

MATAMAITIC [MA181, Gaeilge]

ONÓRACHA

*An Chéad Pháipéar*

An Dr. D. Johnson,  
An tOllamh T.C. Hurley,  
An Dr. S. MacDiarmada,  
An Dr. A.E. NicBhloscaidh.

Am ceadaithe: *Trí* huairé.  
Lán marcanna i gcomhair sé cheist.

1. (a) Faigh asamtóití go léir agus tarraing graf na feidhme  $\frac{1}{x^2 - x}$ .

(b) Aimsigh na teorainneacha seo a leanas:

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x \sin 3x}$$

2. (a) Faigh an díorthach,  $\frac{dy}{dx}$ , i ngach cás thíos:

$$(i) y = \tan(\sqrt{\sec x}) \quad (ii) y^2(\sin x) + y = \tan^{-1} x \quad (iii) y = x(\sin(\log x) - \cos(\log x))$$

- (b) Tá clár fógraíochta dronuilleogach ag teastáil. Caithfidh achar an fhógra féin a bheith cothrom le  $100\text{m}^2$  agus teastaíonn imeall leithead 2m ag bun agus ag barr an fhógra agus imeall 4m ar a dhá thaobh. Aimsigh buntomhasanna an chláir ionas go mbeidh achar an chláir uilig ina íosluch.

cas le do thoil

3. (a) Ríomhaigh *trí cinn* de na suimeálaithe seo a leanas:

$$(i) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx, \quad (ii) \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \quad (iii) \int \tan^4 x dx \quad (iv) \int \frac{dx}{e^x+1}.$$

- (b) Deimhnigh an fhoirmle laghdaithe seo a leanas

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

agus bain úsáid aisti chun  $\int \sin^5 x dx$  a ríomh.

4. (a) Mínigh na téarmaí (i) tacar críochna (ii) tacar éigríochta (iii) tacar inchomhairthe (iv) tacar dochomhairthe. Tabhair samplaí de thacar inchomhairthe A agus de thacar dochomhairthe B. *Cruthaigh* go bhfuil B dochomhairthe.

- (b) (i) Tabhair sainmhíniú ar  $|x|$  agus taispeáin go bhfuil  $|x+y| \leq |x| + |y|$ .  
(ii) Luacháil  $\int_0^3 |x^2 - 4| dx$ .

5. (a) Cruthaigh gur fíor, má tá seicheamh méadaitheach agus uaschuimsithe, go bhfuil an seicheamh sin coinbhéirseach.

- (b) Tugtar an seicheamh  $(a_n)$  le  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$  ( $n \geq 1$ ).

- (i) Ríomhaigh na téarmaí tosaí agus déan tomhas faoi cad a tharlaíonn don seicheamh.  
(ii) Glac leis go bhfuil an seicheamh coinbhéirseach agus aimsigh an teorainn (deimhneach).  
(iii) Anois taispeáin gur féidir leas a bhaint as (a) thuas lean chruthú go bhfuil an seicheamh  $(a_n)$  coinbhéirseach.

6. (a) Cad is ciall lena rá go bhfuil an fheidhm  $f$  leanúnach ag  $c$  i  $(a, b)$ ? Bain úsáid as teoirimí na dteorann lena thaispeáint go bhfuil an fheidhm  $f$  atá sainithe thrí

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 1$$

leanúnach **ag 2**.

- (b) Inis Teoirim an Eadarluacha. Bain úsáid as lena thaispeáint go bhfuil préamh ag an iltéarmach i gcuid (a) san eatramh  $[-1, 0]$  agus ceann eile i  $[0, 1]$ .  
(c) Tabhair cruthú imlíneach ar Theoirim an Eadarluacha.

cas le do thoil

7. (a) Tá an fheidhm  $g$  sainithe ar  $(1, 3)$  le

$$g(x) = \begin{cases} px^2 + x + 3 & \text{do } 1 < x \leq 2 \\ 3x + q & \text{do } 2 < x < 3 \end{cases}$$

Taispeáin go bhfuil  $g$  leanúnach ar  $(1, 3)$  sa chás, agus sa chás sin amháin, go bhfuil  $q = 4p - 1$ . Cad iad na luacha de  $p$  agus  $q$  má tá  $g$  indifréalaithe ar  $(1, 3)$ ?

- (b) (i) Glac le Teoirim Rolle agus cruthaigh Teoirim an Mhéanluacha.  
(ii) Taispeáin go bhfuil an fheidhm  $f$  méadaitheach ar  $(1, 2)$  má tá  $f'(x) > 0$  do gach  $x$  i  $(1, 2)$ .

8. (a) (i) Bain úsáid as an sainmhíniú

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad (x > 0),$$

lena thaispeáint go bhfuil  $\ln ab = \ln a + \ln b$  ( $a, b > 0$ ). Mínigh (go gearr) cé'n fáth gur féidir  $d > 0$  a fháil do gach  $c$  ionnus go bhfuil  $\ln d = c$ . Uaidh sin tabhair sainmhíniú ar  $e^x$ .

- (ii) Ríomhaigh an tsuim Riemann íochtarach  $L(h, P)$  áit go bhfuil  $h(x) = \frac{1}{x}$  agus gurb é  $P$  an rann de  $[1, 3]$  in ocht fo-eatrainmh cothroma. Cad a deir an freagra faoi luach  $e$ ?

- (b) Taispeáin go bhfuil an suiméalaí mí-chuí

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$$

dibhéirseach.

Taispeáin freisin gur fíor go bhfuil

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \quad (n \geq 2)$$

agus bain uaidh sin go bhfuil an tsraith

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

dibhéirseach.