

OLLSCOIL NA hÉIREANN, GAILLIMH
NATIONAL UNIVERSITY OF IRELAND, GALWAY

SCRÚDAITHE AN tSAMHRAIDH 2003

AN CHÉAD SCRÚDÚ OLLSCOILE

MATAMAITIC [MA180, GAEILGE]

MA183 - AILGÉABAR

ONÓRACHA

An Dara Páipéar

An Dr. Dave Johnson

An tOllamh T. Hurley

An Dr. J. Burns

An Dr. A. Christofides

Am ceadaithe: *Trí* huaire.

Freagraítear sé cheist.

1. Bíodh $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Fáigh eigenluacha agus eigenveicteoirí na maitríse A . Scríobh síos maitrís in-inbhéartaithe E (maitrís a bhuil inbhéarsa aici), agus maitrís thrasnánach D , ionnas go bhfuil $A = EDE^{-1}$.

Ríomhaigh A^n agus réitigh, lena chabhair sin nó ar bhealach eile, an coibhneas aithfhillteach

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n - y_n \\ y_{n+1} &= -3x_n + 4y_n \end{aligned}$$

maille le $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

- (b) Scríobh síos an claochló $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ atá sainmhínithe ag A . Fáigh an líne arb í an líne $x + y = 2$ a híomhá faoi T .

cas le do thoil

2. (a) Bíodh

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ríomhaigh inbhéarsa A^{-1} na maitrise A agus bain leas as leis na cothromóidí seo leanas a réiteach.

$$\begin{aligned} 3x + 6y - 3z &= 3 \\ 3x - z &= 1 \\ 3x - y &= 4. \end{aligned}$$

Cruthaigh go bhfuil $\lambda = 2$ ina eigenluach de A , agus fáigh eigenveicteoir don eigenluach sin.

(b) Bain leas as an gcroisíolra, (cross product), leis na réiteacha ar fad atá ag an gcóras cothromóidí seo leanas a fháil.

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \quad 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0.$$

3. (a) Inis Aicsím na Deá-ordaitheachta i gcás \mathbf{Z} , agus taispeáin go gcliseann ar an aicsím i gcás \mathbf{Q} .

(b) Bain leas as Prionsabal an Ionductaithe, (the Principle of Induction), lena chruthú go bhfuil

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{do gach } n \geq 1.$$

(c) Bain leas as Algartam (Algorithm) Euclid le $\gcd(250, 111)$ a fháil. Uaidh sin fáigh slánuimhreacha x, y i dtreo is go bhfuil $250x + 111y = 6$.

4. (a) Bain leas as Modh an Chriathair leis na huimhreacha príomha uilig san eatramh $[8, 96]$ a aimsiú.

(b) Cruthaigh go bhfuil líon éigcríochta uimhir phríomha den chuma $4q + 3$, áit ar slánuimhir dheimheach í q .

(c) Cruthaigh go bhfuil $\sqrt{7}$ éagcóimheasta.

cas le do thoil

5. (a) Réitigh an tiomchuibheas $8x \equiv 7 \pmod{15}$ agus taispeáin nach bhfuil ann ach an taon réiteach amháin modulo 15.
- (b) Fáigh na baill in-inbhéartaithe (na baill a bhfuil inbhéarsa acu) de \mathbf{Z}_9 agus tabhair inbhéarsa gach uile cheann acu. Réitigh an chothromóid $5x = 12$ in \mathbf{Z}_{13} .
- (c) Fáigh na réiteacha *go léir* atá ag an gcóras comhuaineach

$$x \equiv 3 \pmod{5}, \quad x \equiv 6 \pmod{7}, \quad x \equiv 5 \pmod{9}.$$

6. (a) Sainmhínigh feidhm Euler, (an fheidhm ϕ).
Fáigh $\phi(m)$, (i) nuair atá $m = 128$, (ii) nuair atá $m = 2^4 \cdot 5^{11} \cdot 13^7$.
- (b) Inis agus cruthaigh *Teoirim Euler*.
Bain leas as Teoirim Euler, nó as bealach eile, leis an bhfuilleach a fháil nuair a roinntear 2^{986} ar 45.
- (c) Fáigh an digit atá ar iarraidh san uimhir ISBN 3-540-7?1-87-X.

7. (a) Scríomh an tiomalartú

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 6 & 3 & 15 & 11 & 9 & 10 & 1 & 8 & 12 & 13 & 4 & 7 & 14 & 5 \end{pmatrix}$$

- (i) ina thoradh ciogail scartha.
- (ii) ina thoradh trasuíomh, (ciogail fad 2).
- Fáigh *ord* agus *comhartha* π .
- (b) Mínigh cén chaoi ar féidir *comhartha* iomalartaithe de chuid S_n a shainmhíniú go *huathúil*, (sé sin a rá go bhfuil an tiomalartú *réidh* nó *corr*). (Luaidh teoirim, gan í chruthú, a dhearbhaíonn *uathúlacht* an tsainmhínithe ar *réidh* agus *corr*).
- (c) Scríomh $x^3 + 3x^2 + x + 3$ ina thoradh factóirí dolaghdaithe ar \mathbf{Z}_5 .

cas le do thoil

8. Freagraítear ceann agus ceann amháin den dá cheist A agus B seo leanas.

A

- (a) Inis agus cruthaigh Teoirim Lagrange faoi ord foghrúpa de ghrúpa críochna.
- (b) Tugtar G ar ghrúpa siméadrachtaí na cearnóige. Scríobh síos liosta na mball ar fad a tá ag G . Taispeáin go bhfuil dhá fhoghrúpa neamhiosomorfacha ord 4 ag G . Scríobh síos tábla méadaithe do chuile cheann de na foghrúpaí seo, agus mínigh go soléir cén fáth nach bhfuil na foghrúpaí iosomorfach.

B

- (a) Is coibhneas é R ar an tacar S . Mínigh céard is ciall lena rá go bhfuil R ina choibhneas coibhéise.

Is córas ailgéabrach é $(S, *)$. Mínigh céard is ciall lena rá gur iomchuibheas é R ar $(S, *)$.

Bíodh R ina iomchuibheas ar $(S, *)$ agus scríobhtar $S/R = \{E_a : a \in S\}$; sé sin, sé S/R tacar na naicmí coibhéise de S maidir le R . Sainmhínítear an toibriú $\bar{*}$ ar S/R thrí $E_a \bar{*} E_b = E_{a*b}$. Taispeáin go bhfuil sainmhíniú an oibrithe seo neamhathbhríoch (sé sin, nach mbraitheann sé ar ionadaithe na naicmí) agus, dhá bharr sin, gur córas ailgéabrach é $(S/R, \bar{*})$.

- (b) Bíodh $S = \mathbb{Z}$ agus bíodh an sainmhíniú ar aRb ná go bhfuil $a - b$ ionroinnte ag 7. Taispeáin gur iomchuibheas é R ar $(\mathbb{Z}, +)$ agus ar (\mathbb{Z}, \times) maraon. Déan cur síos ar na córais ailgéabracha $(\mathbb{Z}/R, \bar{+})$ agus $(\mathbb{Z}/R, \bar{\times})$.