

OLLSCOIL NA hÉIREANN, GAILLIMH
NATIONAL UNIVERSITY OF IRELAND, GALWAY

SCRÚDAITHE AN tSAMHRAIDH, 2004

AN CHÉAD SCRÚDÚ OLLSCOILE

MATAMAITIC [MA102]
[MA181] - GAEILGE

ONÓRACHA
An Chéad Pháipéar

An Dr. D. Johnson
An tOllamh T. Hurley
An tOllamh M. Ó Tnúthail
An Dr. S. MacDiarmada

Am ceadaithe: *Trí* huairé.
Lán marcanna i gcomhair sé cheist.

- Q1. (a) Mínigh cé'n fáth nach bhfuil $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ sonraithe do $-1 \leq x < 1$.
(b) Taispeáin go bhfuil $f(x)$ diúltach nuair atá $x < -1$.
(c) Tarraing breac-léaráid den gcuar $y = f(x)$ agus léirigh na hasamtóití cothrománacha agus ceartingearacha inti.
- Q2. (a) Ag baint úsáid as an sonnrú $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$,
cruthaigh go bhfuil $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$, nuair atá $g'(a) \neq 0$ agus $f(a) = g(a) = 0$.
- (b) Luacháil na teorainneacha:
(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2-\sqrt{x^2+3}}$ (ii) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2\theta}{\sin \theta \sin 2\theta}$ (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-x+1}{2x^2-9}$.

pto

Q3. (a) Faigh an díorthach y' nuair atá:

$$(i) y = \tan^{-1}(\sqrt{x+1}) \quad (ii) y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$(iii) y(\sin x - y) = \cos x.$$

(b) I soitheach sorcóireach dúnta, sé r ga an bhoinn agus sí h an aoirde. Scríobh an toirt V agus achar an dromchla S i dtéarmaí r agus h . Cruthaigh i soitheach ar thoirt seasta V_0 go bhfuil S ar íosluach nuair atá $r = h$.

Q4. (a) Luacháil trí chinn díobh seo a leanas:

$$(i) \int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} dx \quad (ii) \int (\tan^{-1} x) x dx \quad (iii) \int \frac{dx}{1+\cos 2x} \quad (iv) \int \sec^3 x dx.$$

(b) Bíodh $I_n = \int \cos^n x dx$, áit gur slán-uimhir deimhneach í n .
Luacháil I_1 agus cruthaigh an foirmle laghdúchán

$$\frac{n}{n-1} I_n = I_{n-2} + \frac{1}{n-1} (\cos^{n-1} x \sin x) \text{ do } n > 1.$$

Uaidh seo luacháil $\int \cos^3 x dx$.

Q5. (a) (i) Aimsigh $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1}$.

(ii) Tabhair sainmhíniú ar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, agus taispeáin go sásaítear an sainmhíniú i (i) thuas.

(b) Inis Aicsím na Sláine do \mathbb{R} , agus mínigh na téarmaí a úsáidtear. Aimsigh (le cruthú) an supremum $\sup S (= \text{lub } S)$ de'n tacar $S = \{2 - \frac{3}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Q6. (a) Breac síos príomh teoirimí na dteorann agus bain leas asta lena thaispeáint

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+4}{x^2+x-1} = 2 \quad (ii) \text{nach ann do } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4}{x-1}.$$

(b) Taispeáin go bhfuil an fheidhm f leanúnach ag c má tá sí indifreálaithe ag c . Taispeáin to bhfuil an fheidhm g sainithe le $g(x) = |x^2 - 1|$ leanúnach ag 1 ach nach bhfuil sí indifreálaithe ag 1.

pto

Q7. (a) Inis Teoirim an Eadarluacha (IVT) agus Teoirim an Mheánluacha (MVT). Bain leas as IVT agus/nó MVT (do réir mar a oireann) lena thaispeáint go bhfuil:

- (i) an fheidhm f méadaitheach ar (p, q) má tá $f'(x) > 0$ do gach x i (p, q) ;
- (ii) réiteach, agus réiteach amháin, ag an gcothromóid $x = 2 + \ln x$ i $[1, 4]$.

(b) Tabhair cruthú imlíneach ar IVT.

Q8. (a) Tá an fheidhm h sainithe le $h(x) = (1 + x^2)^{-1}$, agus sé P an rann de $[0, 1]$ in ocht fo-eatraimh cothroma. Ríomhaigh an tsuim Riemann íochtarach $L(h, P)$ agus bain uaidh sin go bhfuil $\pi > 3$.

(b) (i) Taispeáin go bhfuil an suimeálaí mí-chuí $\int_1^\infty \frac{dx}{(x+2)^2}$ coinbhéirseach, agus aimsigh a luach.

(ii) Taispeáin go bhfuil

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^2} \leq \int_1^n \frac{dx}{(x+2)^2},$$

agus bain uaidh sin go bhfuil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2}$ coinbhéirseach.

Aimsigh garluach sa riocht $a \leq L \leq b$ do suim L na sraithe.