

OLLSCOIL NA hÉIREANN, GAILLIMH
NATIONAL UNIVERSITY OF IRELAND, GALWAY

SCRÚDAITHE AN tSAMHRAIDH 2004

AN CHÉAD SCRÚDÚ OLLSCOILE

MATAMAITIC [MA102, GAEILGE]

MA183 - AILGÉABAR

ONÓRACHA

An Dara Páipéar

An Dr. Dave Johnson

An tOllamh T. Hurley

An Dr. J. Burns

Am ceadaithe: *Trí huaire.*

Freagraítear *sé* cheist.

1. Bíodh $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

(a) Fáigh eigenluacha agus eigenveicteoirí na maitrise A .

Scríobh síos maitrís in-inbhéartaithe E (maitrís a bhfuil inbhéarsa aici), agus maitrís thrasnánach D , ionas go bhfuil $A = EDE^{-1}$.

Ríomhaigh A^n agus réitigh, lena chabhair sin nó ar bhealach eile, an coibhneas aithfhillteach

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 4x_n - 6y_n \\ y_{n+1} &= -2x_n + 8y_n \end{aligned}$$

maille le $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

(b) Scríobh síos an claochló $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ atá sainmhínithe ag A . Fáigh an líne a bhfuil an líne $x + 2y = 4$ mar íomhá aici faoi T , agus an líne atá fágtha fosaithe, (fixed), ag T .

cas le do thoil

2. (a) Bíodh

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ríomhaigh inbhéarsa A^{-1} na maitríse A agus bain leas as leis na cothromóidí seo leanas a réiteach.

$$\begin{aligned} -2x + 2y - 3z &= 3 \\ 2x + y - 6z &= 1 \\ -x - 2y &= 5. \end{aligned}$$

- (b) Tugtar go bhfuil $|A^2 - 5A| = 0$. Bain leas as an eolas sin le eigenveicteoir do A a fháil.
- (c) Bain leas as an gcroisolra, (cross product), leis na réiteacha ar fad atá ag an gcóras cothromóidí líneacha seo leanas a fháil.

$$-2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \quad 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 0.$$

3. (a) Inis Aicsím na Deá-ordaitheachta i gcás \mathbb{Z} , agus taispeáin go gcliseann ar an aicsím i gcás \mathbb{Q} .
- (b) Cruthaigh thrí Ionduchtú go bhfuil

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

do gach slánuimhir $n \geq 1$.

- (c) Bain leas as Algartam (Algorithm) Euclid le $\gcd(1820, 231)$ a fháil. Uaidh sin fáigh slánuimhreacha x, y i dtreo is go bhfuil $3640x + 462y = 28$.
4. (a) Bain leas as Modh an Chriathair leis na huimhreacha príomha uilig san eatramh $[1, 120]$ a aimsiú.
- (b) Cruthaigh go bhfuil líon na n -uimhir bpríomha den chuma $4q + 3$, le q ina slánuimhir dheimheach, éigcríochta.
- (c) Cruthaigh go bhfuil $\sqrt{11}$ éagcóimheasta.

cas le do thoil

5. (a) Réitigh na hiomchuibhís chomhuaineacha seo leanas:

$$x \equiv 2 \pmod{3}, \quad x \equiv 4 \pmod{5}, \quad x \equiv 6 \pmod{11}.$$

- (b) Réitigh an t-iomchuibheas

$$8x \equiv 7 \pmod{15}$$

agus taispeáin nach bhfuil ann ach an t-aon réiteach amháin mod-
ulo 15.

- (c) Fáigh an t-inbhéarsa atá ag 13 in \mathbb{Z}_{47} .

6. (a) Sainmhínigh feidhm Euler, (an fheidhm ϕ). Taispeáin go bhfuil

$$\phi(p^n) = p^n \left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{ más uimhir phríomha í } p.$$

Fáigh $\phi(m)$, (i) nuair atá $m = 256$, (ii) nuair atá $m = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 7^2$.

- (b) Inis (ná cruthaigh) Teoirim Euler.

Bain leas as Teoirim Euler, nó as bealach eile, leis an bhfuilleach
a fháil nuair a roinntear 2^{1014} ar 45.

- (c) Fáigh an digit atá ar iarraidh san uimhir ISBN

$$4 - 213 - 76? - 35 - 7$$

7. (a) Scríomh an t-iomalartú

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 7 & 8 & 5 & 10 & 9 & 1 & 3 & 12 & 11 & 4 & 14 & 15 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

(i) ina thoradh ciogail scartha.

(ii) ina thoradh trasuíomh, (ciogail fad 2).

Fáigh *ord* agus *comhartha* π .

- (b) Mínigh cén chaoi ar féidir iomalartú *corr* agus iomalartú *réidh*
a shainmhíniú. Luaidh teoirim, gan í chruthú, a dhearbhaíonn
uathúlacht an tsainmhínithe ar *réidh* agus *corr*.

- (c) Fáigh na factóirí dolaghdaithe atá ag $x^4 - 1$

(i) in $\mathbb{Z}_5[x]$, (ii) in $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

cas le do thoil

8. Freagraítear ceann agus ceann amháin den dá cheist A agus B seo leanas.

A

- (a) Inis agus cruthaigh Teoirim Lagrange faoi ord foghrúpa de ghrúpa críochna.
- (b) Tugtar G ar ghrúpa siméadrachtaí na cearnóige. Scríobh síos liosta na mball ar fad a tá ag G . Taispeáin go bhfuil dhá fhoghrúpa neamhiosomorfacha ord 4 ag G . Scríobh síos tábla méadaithe an dá fhoghrúpa seo, agus mínigh go soléir cén fáth nach bhfuil siad iosomorfach.

B

- (a) Is coibhneas é R ar an tacar S . Mínigh céard is ciall lena rá go bhfuil R ina choibhneas coibhéise.
- Is córas ailgéabrach é $(S, *)$. Mínigh céard is ciall lena rá gur iomchuibheas é R ar $(S, *)$.
- Bíodh R ina iomchuibheas ar $(S, *)$ agus tugtar $S/R = \{E_a : a \in S\}$ ar thacar na naicmí coibhéise de S maidir le R . Sainmhínítear an t-oibriú $\bar{*}$ ar S/R thrí $E_a \bar{*} E_b = E_{a*b}$. Taispeáin go bhfuil sainmhíniú an oibrithe seo neamhathbhríoch (sé sin, nach mbraitheann sé ar ionadaithe na naicmí) agus, dhá bharr sin, gur córas ailgéabrach é $(S/R, \bar{*})$.
- (b) Bíodh $S = \mathbb{Z}$ agus bíodh an sainmhíniú ar aRb , go bhfuil $a - b$ ionroinnte ag 7. Taispeáin gur iomchuibheas é R ar $(\mathbb{Z}, +)$ agus ar (\mathbb{Z}, \times) maraon. Déan cur síos ar na córais ailgéabracha $(\mathbb{Z}/R, \bar{+})$ agus $(\mathbb{Z}/R, \bar{\times})$.