

OLLSCOIL NA hÉIREANN, GAILLIMH
THE NATIONAL UNIVERSITY OF IRELAND, GALWAY

SCRÚDAITHE AN tSAMHRAIDH 1999

AN CHÉAD SCRÚDÚ OLLSCOILE

MATAMAITIC — [MA181, Gaeilge]

ONÓRACHA

An Chéad Pháipéar

An t-Ollamh J. Wiegold,
An t-Ollamh T.C. Hurley,
An Dr. R. A. Ryan,
An Dr. S. Mac Diarmada,

Am ceadaithe: *Trí* huaire.
Lán marcanna i gcomhair sé ceist.

1. (a) Fáigh asamtóití agus idirlíntí go léir na feidhme

$$\frac{8 + 2x - x^2}{x^2 + 4x + 3}.$$

agus tarraing srac-léaráid den ghraf. (Siad na h-idirlíntí na pointí ina ngearrann graf na feidhme an x -ais agus an y -ais).

- (b) Aimsigh na teoranna seo leanas:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 - 1} \quad (ii) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\sin 2\theta \sin 3\theta} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^4 + 6} - x^2.$$

cas le do thoil

2. (a) Fáigh an díorthach, y' , i gcás *dhá cheann* de na feidhmeanna seo leanas:

$$(i) y = \left(\frac{(x-2)^2(2x+3)}{(3x-1)^3} \right)^{1/4}; \quad (ii) y = x^{\sin x}; \quad (iii) x^3 y^2 - x \cos(x+y) = 1.$$

- (b) Tá balla airde 8 méadar suite fad méadair ó theach. Fáigh fad an dréimire is giorra a shroisfeadh ón talamh go dtí an teach, thar barr an bhalla.

3. (a) Ríomhaigh *dhá cheann* de na suimeálaithe seo leanas:

$$(i) \int \sin^5 x \cos^2 x \, dx, \quad (ii) \int \frac{x \, dx}{x^2 - 3x - 4}, \quad (iii) \int e^{-x} \sin(2x) \, dx,$$

- (b) Fáigh foirmle laghdaithe i gcomhair an tsuimeáilithe

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

agus bain leas aisti le I_6 a ríomh.

4. (a) Bain leas go cúramach as teoirimí na dteorann lena chruthú go bhfuil

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 2x - 3) = 32.$$

- (b) Tabhair an sainmhíniú cruinn ar $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$. Bain leas as an sainmhíniú seo le cuid (a) den cheist seo a chruthú.

- (c) Tabhair an sainmhíniú cruinn ar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ agus bain leas as lena chruthú go bhfuil

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

cas le do thoil

5. (a) Scríobh síos Teoirim an Eadarluacha agus bain leas aisti lena chruthú go bhfuil fréamh ag an gcothromóid $x = \cos x$ san eatramh $[0, \pi/2]$.
- (b) Tá an fheidhm f leanúnach ag c , agus tá $f(c) > 0$. Cruthaigh go bhfuil $\delta > 0$ ann ionnas go bhfuil $f(x) > 0$ do gach x san eatramh $(c - \delta, c + \delta)$.
- (c) Tabhair achoimre ar chruthú Theoirim an Eadarluacha.
6. (a) Tugtar an fheidhm f mar leanas:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + c & \text{má tá } 1 < x \leq 2 \\ 3x - 4 & \text{má tá } 2 < x < 3. \end{cases}$$

Táispeáinn go bhfuil f leanúnach ar $(1, 3)$ más ea agus más amháin go bhfuil $c = -4a$. Céard iad luacha a agus c má tá f indifreáilte ar $(1, 3)$?

- (b) Cruthaigh Teoirim an Mheánluacha le cabhair Theoirim Rolle. Tugtar feidhm f ionnas go bhfuil $f'(x) = 0$ do gach x i $(0, 1)$. Táispeáinn go bhfuil f tairiseach ar $(0, 1)$.

cas le do thoil

7. (a) Tá $h(x) = (1 + x^2)^{-1}$ agus is é P rann an eatraimh $[0, 1]$ i gcúigí cothroma. Ríomhaigh suim uachtarach Riemann, $U(f, P)$, agus suim íochtarach Riemann, $L(f, P)$, na feidhme h , agus fíoraigh go bhfuil

$$L(h, P) \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \leq U(h, P).$$

- (b) Tá f ionsuimeáilithe de réir Riemann ar $[a, b]$ agus tá $m \leq f(x) \leq M$ do gach x in $[a, b]$. Mínigh cén fáth bhfuil

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

- (c) Más fíor freisin go bhfuil f leanúnach ar $[a, b]$, táispeáinn go bhfuil

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

indifreáilte ar (a, b) , agus go bhfuil $F'(x) = f(x)$.

8. (a) Taispeáin go bhfuil an suimeálach míchuí

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$$

coinbhéirseach, agus ríomhaigh é.

- (b) Tá an seicheamh (a_n) méadaitheach agus uaschuimsithe. Cruthaigh go bhfuil sé coinbhéirseach.
- (c) Taispeáin go bhfuil

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \leq \int_1^n \frac{dx}{x^3}.$$

Cén fáth gciallaíonn sé seo go bhfuil an tsraith $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}$ coinbhéirseach?