GX1605

OLLSCOIL NA hÉIREANN, GAILLIMH
THE NATIONAL UNIVERSITY OF IRELAND, GALWAY

SCRÚDAITHE AN tSAMHRAIDH 1999

AN CHÉAD SCRÚDÚ OLLSCOILE

MATAMAITIC --- [MA183, Gaeilge]

ONÓRACHA
An Dara Pháipéar

An t-Ollamh J. Wiegold
An t-Ollamh T.C. Hurley
An Dr. R.M. Dunwell
An Dr. G. Pfeiffer

Am ceadaithe: *Trí* Huaire
Lán marcanna i gcomhair *sé* ceist.

1. (a) Faigh eigenluacha agus eigenveicteoirí na máitríse

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Is eigenluacha iad –1 agus 5 le eigenveicteoirí comhfhreagaireacha $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ agus $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ don máitris $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Bain úsáid as seo chun

(i) A a scríobh sa riocht EDE^{-1} áit gur máitris threasnánach í D.

(ii) chun an coibhneas athfhillteach

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4a_n + b_n \\ b_{n+1} &= 5a_n \end{aligned}$$

áit $a_0 = 1$ agus $b_0 = 2$ a réiteach.

(c) Teaspaín gur mappáil líneach é $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - y \\ 2y \end{pmatrix}$.

2. (a) Do $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & -5 & 4\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ deimhnigh go bhfuil $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 3\\ -5 & 1 & 1\\ -4 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

Bain úsáid as seo chun na cudromóidí

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 1\\ 3x & - & 5y & + & 4z & = & 4\\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3\end{array}$$

a réiteach.

(b) Is eigenluacha iad 2, -1, -1 do máitrís áirithe X agus siad

$\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-5\\-2\end{pmatrix}$ na heigenveicteoirí comhfhreagaireacha.

Faigh an máitris X.

3. (a) Scríobh síos an prionsabal dea-ordaithe.

(b) Cruthaigh go hionduchtúil go bhfuil $7^n - 1$ ionroinnte ar 6 do gach $n \geq 1$.

(c) (i) Faigh gcd(5310, 2115) agus

(ii) Faigh slánuimhreach m agus n ionnus $5310n + 2115m = \gcd(5310, 2115)$.

4. (a) Is liosta finideach é L de uimhreacha idir 0 agus 1 scriobhta san nodaíocht dheachúla.
Mínigh módh chun uimhir eile idir 0 agus 1 a roghnú nach bhfuil sa liosta L.

(b) Teaspaín gur feidir gach uimhir n a scríobh mar thoradh uimhreacha phríomha.

(c) Deán seo do $n = 1630827$.

(d) Cruthaigh go bhfuil líon na n-uimhreach priomha infideach.

5. (a) Bíodh $X = \{2,7,8,13,16,19,20\}$.
Abair $x \sim y$ má tá $x - y$ ionroinnte ar S.
Teaspáin gur coibhneas coibhéiseach é seo agus faigh an rannú comhfhreagaireach in X.

(b) Bíodh $S = \{(a,b)$ áit $a,b \in \mathbf{Z}$ agus $b \neq 0\}$.
Ag glacadh leis gur coibhneas coibhéise in S é $(a,b) \sim (c,d)$ má tá $ad = bc$.
Más é $[(a,b)]$ *rang* (a,b) in X agus má sainmhíntear suim dhá rang do réir

$$[(a,b)] + [c,d] = [(ad + bc, bd)]$$

cruthaigh

$$[(\overline{a},\overline{b})] + [(\overline{c},\overline{d})] = [(a,b)] + [(c,d)]$$

má tá $(\overline{a},\overline{b}) \sim (a,b)$ agus
$(\overline{c},\overline{d}) \sim (c,d)$.

(c) Faigh an inbhéarta atá ag 10.

(i) i $\mathbf{Z}_{13}$,
(ii) i $\mathbf{Z}_{17}$, agus
(ii) mínigh cén fáth nach bhfuil inbhéarta ag 10 i $\mathbf{Z}_{15}$.

6. (a) Teaspáin go bhfuil inbhéarta ag a i Z_m ansin agus ansin amháin má tá $\gcd(a,m) = 1$.

(b) Bain úsáid as Teoirm Euler chun an fúilleach a fháil nuair a roinntear

3^{340} ar 341.

(c) Faigh an réiteach geinearálta ar an gcoibhéis comhuaineach

$$\begin{aligned} x &\equiv 8 \pmod{11} \\ x &\equiv -3 \pmod{13}. \\ x &\equiv 4 \pmod{15} \end{aligned}$$

7. (a) (i) Faigh an líon agus an fuílleach nuair a roinntear $x^4 + x^3 + 1$ ar $x^2 + x + 1$ i $\mathbf{Z}_7[x]$.

(iii) Faigh na fachtoírí dolaghdaithe de

$$x^3 + 6x^2 + 3x + 3 \text{ i } \mathbf{Z}_{13}[x].$$

(b) Scríobh an iomalartú

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 8 & 10 & 3 & 12 & 6 & 16 & 9 & 1 & 13 & 15 & 14 & 5 & 2 & 4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

(i) mar thoradh ciogalach;

(ii) mar thoradh trasuíomh;

(iii) faigh ord agus sín π.

(c) Teaspáin conas a scríobhtar $\pi \in S_n$ mar thoradh trasuíomh agus mínigh cé'n bhaint atá idir an toradh seo agus an sín.

8. (a) Cruthaigh Teoirm Lagrange i leith ord fothghrúpa i ngrúpa finideach.

(b) Scríobh sios tábla an mhéadú in S_3, grúpa ionmhalartaithe 3 pointí. Ceárd iad fothghrúpaí S_3? An bhfuil na grúpaí S_3 agus an grúpa ciogalach den ord 6 iseamorfach lena cheíle? Mínigh do fhreagra.